Leçon 161 : Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Applications en dimensions 2 et 3.

Développements :

Isométries du tétraèdre et du cube, Simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$ (Bof...)

Bibliographie :

Rombaldi, Mercier, H2G2, Perrin, Audin, Combes,

Rapport du jury :

La classification des isométries en dimension 2 et 3 est exigible. Il faut savoir prouver qu'une isométrie est affine, pouvoir donner des générateurs du groupe des isométries affines, et savoir composer des isométries affines. En dimension 3, il faut savoir classifier les rotations et connaître les liens avec la réduction. On peut aussi penser aux applications aux isométries laissant stables certains objets en dimension 2 et 3.

Remarque 1. *$\mathcal{E}$ est un espace affine euclidien de dimension $n \geq 1$ et de direction E.*

1 Généralités (Etude des isométries)

1.1 Définitions (Notion d'isométries)

Définition 2 (Romb p78)**.** *Application affine. A redéfinir ? On définit $Is(E)$ l'ensemble des isométries de E.*

Définition 3 (Romb p84)**.** *[Mercier p247] Isométrie affine : $||f(a))f(b)|| = ||ab||$.*

Exemple 4 (Audin p53)**.** *Les translations sont des isométries. (symétries, réflexions).*

Exemple 5 (Audin p53)**.** *Une homothétie est une isométrie si et seulement si son rapport est de valeur absolue* 1*.*

Proposition 6 (Mercier p247)**.** *[Romb p85] $f : E \to E$ est une isométrie affine si et seulement si c'est une application affine dont la partie linéaire est une application orthogonale.*

Proposition 7 (Mercier p248)**.** *Toute isométrie est bijective et $Is(E)$ est un sous-groupe du groupe affine $(GA(E), \circ)$.*

Proposition 8. *Les translations forment un sous-groupe de Isom(E), isomorphe à (E, +).*

Définition 9 (Romb p85)**.** *[Mercier p248] Groupes des déplacements et des antidéplacements.*

Proposition 10 (ROomb p85)**.** *Le groupe des déplacements est un sous-groupe distingué d'indice* 2 *de $Is(E)$.*

1.2 Ecriture canonique, propriétés des isométries

Proposition 11. *Soit $O \in V$. L'ensemble $Is_O(E) := \{f \in Is(E), f(O) = O\}$ est appelé stabilisateur de O.*

C'est un sous-groupe de $Is(E)$, et $f \in Is_O(E) \mapsto v_f \in O(V)$ est un isomorphisme de groupes. (Ici ou au début de la sous-section suivante ?)

Proposition 12 (Mercier p249)**.** *Soit $f \in Is(E)$. L'ensemble $Inv(f)$ des points invariants de f est un sous-espace affine de E de direcion $Inv(v_f) := Ker(v_f - Id_V)$.*

Proposition 13 (Mercier p249)**.** *Toute isométrie affine f s'écrit de façon unique $f = t_u \circ g = g \circ t_u$ où $u \in Inv(v_f)$ et g est une isométrie affine possédant au moins un point fixe.*

Corollaire 14 (Mercier p250)**.** *Si $Inv(v_f) = \{0_V\}$ alors f admet un unique point fixe.*

Corollaire 15. *Centre de $Is(E)$.*

Remarque 16. *Dans $\mathbb{R}^n$, $f(v) = Mv + b$ où $M \in O_n(R)$.*

Proposition 17 (Mercierp254)**.** *Soit $(A_0, A_1, .., A_n)$ un repère affine de E. On considère $B_0, .., B_n \in E$ tels que $||B_iB_j|| = ||A_iA_j|| \forall i, j$. Alors il existe une unique isométrie affine envoyant $(A_0, A_1, .., A_n)$ sur $(B_0, B_1, ..., B_n)$. De plus, $(B_0, .., B_n)$ est un repère affine de E.*

Corollaire 18. *Une isométrie est entièrement déterminée par l'image de $(n + 1)$ points.*

Remarque 19 (Combes)**.** *Les applications aux déplacements et antidéplacements, aux triangles isométriques ?*

Remarque 20. *Soit $R = (A_0, .., A_n)$ un repère affine de E. f est une isométrie ssi pour tout $i, j \in \{0, .., n\}$, $f(A_i)f(A_j) = A_iA_j$. Et alors $(f(A_0), .., f(A_n))$ forme aussi un repère affine de $f(E)$. A mettre qqpart ?*

2 Etude de $O(E)$

2.1 Définitions

Remarque 21. *Le lien étroit explicité précédemment entre $Is(E)$ et $O(E)$ donne l'intérêt de cette étude, qui fournira la classification des isométries.*

Proposition 22 (Audin p60)**.** *Etant donnée une base orthonormée, on identifie $O(E)$ à $O_n(\mathbb{R}) = \{M, M^tM = I\}$.*

Proposition 23 (Audin p61)**.** *$O_n(\mathbb{R})$ est compact.*

2.2 Réduction des isométries vectorielles

Proposition 24 (Audin p54)**.** *Si F est stable par une isométrie f alors $F^\perp$ est stable par f.*

Théorème 25 (Audin p64)**.** *Théorème de réduction des endomorphismes orthogonaux et version matricielle.*

2.3 Générateurs de $O(E)$

Proposition 26 (Audin p65)**.** *$SO(E)$ et $Is^+(E)$ sont connexes par arcs.*

Définition 27 (Perrin p125)**.** *[H2G2 ?] Réflexion, renversement.*

Définition 28. *Soit $f \in GL(V)$ une symétrie. Alors les sous-espaces $Ker(f - Id)$ et $Ker(f + Id)$ sont en somme directe. De plus, $f \in O(V)$ si et seulement si ces espaces sont orthogonaux. f est alors appelée symétrie orthogonale.*

Définition 29. *Une réflexion (orthogonale) est une symétrie (orthogonale) telle que $dim(Ker(f + Id)) = 1$. Un renversement (orthogonal) est une symétrie (orthogonale) telle que $dim(Ker(f + Id)) = 2$.*

Théorème 30 (Perrin p143)**.** *$O(E)$ est engendré par les réflexions orthogonales. Tout $f \in O(E)$ est produit d'au plus n réflexions.*

Corollaire 31 (Audin p57)**.** *Toute isométrie de E peut s'écrire comme un produit d'au plus $n + 1$ réflexions.*

Proposition 32 (Perrin p143)**.** *Pour $n \geq 3, SO(V)$ est engendré par les renversements orthogonaux Tout élément$f \in SO(V)$ est produit d'au plus n renversements.*

Corollaire 33 (Mercier ?)**.** *Tout déplacement est le produit d'au plus $n + 1$ retournements.*

Application 34 (H2G2)**.** *SO_3 est simple.*

3 Classification des isométries

3.1 Classification en dimension 2 et 3

Remarque 35. *En dimension 1, $O(E) = \{id, -id\}$ donc ce sont les translations et les "anti-translations".*

3.2 Isométries du plan

Définition 36 (Combes p159)**.** *Soit D une droite affine de E. On appelle symétrie glissée d'axe D une fonction de la forme $f = t_u \circ r_D$ où u est un vecteur directeur de$D$ et où r_D est la réflexion orthogonale d'axe D. (C'est la composée d'une symétrie orthogonale et d'une translation.)*

Définition 37. *On appelle rotation vectorielle d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ une isométrie de E qui a une matrice de la forme R_θ dans une base orthonormée. On appelle rotation de E une isométrie affine dont la partie linéaire est une rotation vectorielle, et possédant au moins un point fixe.*

Proposition 38. *La composée de deux symétries orthogonales d'axes D, D' sécants en Ω est une rotation de centre Ω et d'angle (D, D'). Réciproquement, toute rotation peut s'écrire comme le produit de deux symétries orthogonales d'axes passant par son centre, dont l'un peut être choisi arbitrairement.*

Proposition 39 (Combes p165)**.** *[Audin p88] Les isométries directes du plan euclidien E_2 sont les translations et les rotations autour d'un point. Une isométrie directe a un point fixe si et seulement si c'est une rotation. Les isométries indirectes sont les symétries orthogonales par rapport à une droite et les symétries glissées. Une symétrie indirecte a un point fixe si et seulement si c'est une symétrie orthogonale par rapport à une droite.*

Remarque 40 (Audin p87)**.** *Tableau listant les points fixes, la nature, le caractère direct/indirect, et la forme matricielle réduite des isométries affines du plan euclidien. (rajouter l'identité et en garder seulement les points invariants et mettre les matrices).*

3.3 Isométries de l'espace

Définition 41 (Mercier p252)**.** *On appelle rotation vectorielle d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ toute isométrie vectorielle dont la matrice est dans une certaine base $diag(1, R_\theta)$. L'axe dirigé par le premier vecteur est appelé axe de la rotation. On appelle rotation affine toute application affine ayant au moins un point fixe et dont la partie linéaire est une rotation vectorielle.*

Définition 42 (Mercier p253)**.** *[Combes p168 ?] On appelle vissage la composée d'une translation et d'une rotation.*

Définition 43. *On appelle rotation affine de l'espace euclidien E_3 toute application affine f dont la partie linéaire est une rotation et telle que $Inv(f)$ est non-vide. Si r est une rotation affine dont la partie linéaire est distincte de Id_V , alors $Inv(f) := D$est une droite affine appelée axe de rotation. On note alors $f = r_D$.*

Définition 44. *On appelle vissage d'axe D et de vecteur u une fonction affine de la forme $f := t_u \circ r_D$, où r_D est une rotation d'axe D et où u est un vecteur directeur de$D$.*

Définition 45. *On appelle rotation-symétrie une fonction affine de la forme $f := r_D \circ s_{D^\perp}$) où r_D est une rotation d'axe D et $s_{D^\perp}$ un renversement par rapport au plan $D^\perp$.*

Proposition 46 (Combes p168)**.** *Les isométries directes de l'espace euclidien E_3 sont les vissages et les rotations autour d'un axe.*

Une isométrie directe a des points fixes si et seulement si c'est une rotation autour d'un axe ou bien Id_E.

Les isométries indirectes sont les réflexions, les réflexions glissées, et les rotations symétries.

Une isométrie indirecte a un point fixe ssi c'est une réflexion ou une rotation symétrie.

Remarque 47 (Combes p169)**.** *Tableau listant les points fixes, la nature, le déterminant, et la forme matricielle des isométries affines de l'espace euclidien. (les espaces de points fixes plutôt que juste la dimension.)*

Remarque 48. *Faire des dessins, cf caroline.*

Exemple 49 (Combes p169)**.** *Etude d'une isométrie en dimension* 3.

Application 50. *SO_3 est simple. Ici ? ?*

4 Groupe d'isométries préservant une partie du plan ou de l'espace.

4.1 Définition

Définition 51 (Romb p85)**.** *[Mercier p268] $Is(P)$, $Is(P)^+$, $Is(P)^-$.*

Théorème 52 (Romb p86)**.**

Remarque 53. *Il suffit de trouver l'ensemble $Is(P)^+$ et une isométrie indirecte pour connaître tout $Is(P)$. Lorsque P est fini, on s'intéresse aux isométries fixant l'isobarycentre des éléments de P.*

Exemple 54 (Mercier p270)**.** *Soit ABC un triangle non isocèle. Alors $Is(\{A, B, C\} = \{Id_{E_2}\}$. Si ABC est un triangle isocèle, non équilatéral, alors $Is(\{A, B, C\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

4.2 Polygones réguliers en dimension 2 (Groupe diédral)

Proposition 55 (Mercier p276)**.** *Lien entre polygone inscrit dans un cercle à côtés égaux et rotations.*

Définition 56 (Mercier p276)**.** *Polygone régulier.*

Proposition 57 (Mercier p277)**.** *Soient P polygone régulier et r une rotation associée. Alors le centre du cercle dans lequel P est inscrit est l'isobarycentre des sommets de P, et il existe $k \in \{1, .., n-1\}$, k et n premiers entre eux, tel que r soit d'angle $2k\pi/n$.*

Théorème 58 (Mercier p278)**.** *$Is(P)^+$ est le groupe cyclique d'ordre n engendré par la rotation r. (Le décrire).*

Théorème 59 (Mercier p278)**.** *Il y a exactement n réflexions laissant P_n stable.*

Si n est impair, ce sont les réflexions par rapport aux droites (OA_k).

Si n est pair, ce sont les réflexions par rapport aux médiatrices des segments $[A_k, A_{k+1}]$ ainsi que $[A_{n-1}, A_0]$.

Théorème 60 (Mercier p280)**.** *[Romb p88] Le groupe $Is(P_n)$ est appelé groupe diédral et est noté D_n. Il est d'ordre $2n$, et est engendré par r_O d'ordre n et par une réflexion s d'ordre 2.*

Exemple 61 (Mercier p281)**.** *[Romb p8] $S_3 \simeq D_3$.*

4.3 Isométries du cube et du tétraèdre

Voir Rombaldi.